

## 財團法人中華民國證券櫃檯買賣中心零息殖利率曲線說明

### ■ 編製零息殖利率曲線價格資料來源

每日本中心公債指數計算價格，樣本採公債指數內全部的債券

### ■ 編製零息殖利率曲線的模型說明

#### Steeley Basis Spline 模型

樣條 (splines) 函數法在學術界的討論及研究最為多元，可以使用的方法亦最為豐富。Spline 這個名詞源起於建築界，原本是指利用數個固定點來彎曲細長的薄木片用以繪製出平滑的曲線，透過固定點的數量及位置的改變，就能夠變化出相當豐富的曲線形狀。樣條函數此一類型的配適殖利率曲線方法皆根據 Weierstrass 的逼近定理 (Approximation Theorem)：任何連續函數均可利用多項式加以逼近，而且兩者間的差異可控制在任意小的範圍內，其定理如下：任意定義在有界閉區間  $[a, b]$  的連續函數  $f$ ，總可以用多項式  $P_n$  來逼近兩者

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| = \|f - P\|_{\infty}$$

當  $n \rightarrow \infty$  時誤差趨近於零

一般說來雖然可藉由增加多項式函數的次數 (degree) 來增進配適的狀況，但高次多項式由於方程式的自由度過大，曲線的最外側的兩端常會產生大幅震盪的不穩定現象，為改善尾端大幅震盪的現象，利用分段 (piecewise) 多項式進行來逼近，可有效降低分段多項式的次數，降低尾端大幅震盪的不穩定現象，但仍可獲得良好的配適結果，因此採用樣條法配適殖利率曲線，通常會將整個配適期間切為數個段落，而切割的時點我們通常稱為節點 (knot point，以  $\xi_i$  表示)，

針對每一個段落分別進行配適。

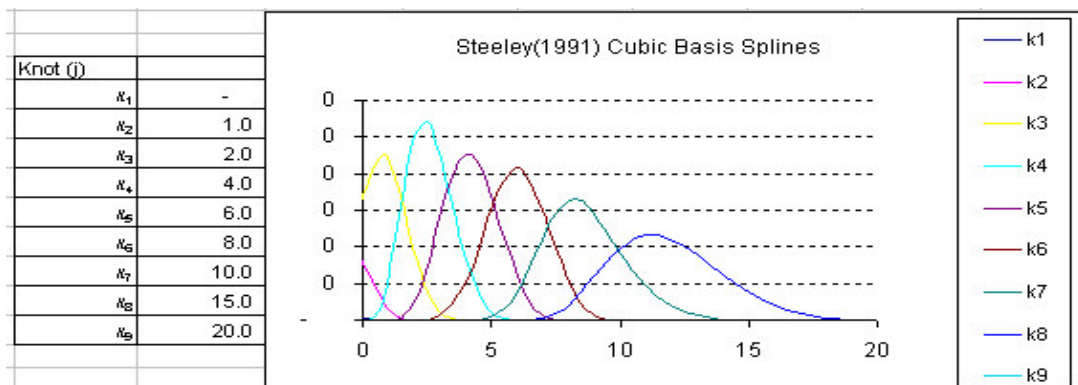
Steeley 於 1991 年以英國公債 (U.K. Gilt-Edged Bond) 配適英國的利率期限結構，其基底函數亦採用 3 次 (cubic) 方程式，乃採用 Powell 於 1981 年推導的 basis spline (B-spline) 定義，其 B-spline 的函數形式如下：

在閉區間  $[A, B]$  中，若節點  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 且滿足  $A = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = B$  的關係，則單一  $k$  次的 B-spline 函數  $B_i^k(t)$  定義為：

$$B_i^k(t) = \sum_{j=0}^{k+1} \left\{ \left[ \prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} \frac{1}{\xi_{i+l} - \xi_{i+j}} \right] [\max(t - \xi_{i+j}, 0)]^k \right\}$$

一般來說以上的 B-spline 函數，若  $k=1$  稱為 linear B-spline，若  $k=2$  則稱 quadratic B-spline，若  $k=3$  則稱為 cubic B-spline，另外此 B-spline 函數  $B_i^k(t)$  只有當時間  $t$  位於  $(\xi_i, \xi_{i+k+1})$  內其值不為零，其餘的區間  $B_i^k(t)$  皆為零，此性質稱為 local support。

Steeley 將 B-spline 函數設定為 3 次，即所謂的 cubic spline 其基底函數型態大致如下圖：



由於 B-spline 具有 local support 性質，因此較一般的 spline 函數具有良好的運算穩定性，可以在不增加函數次數  $k$  的情況下，提供較正確的逼近結果。

B-spline 需要  $n+k$  個線性獨立的  $k$  次 basis function 才能完整

來逼近欲擬合的曲線，但在閉區間 $[A, B]$ 中具備節點 $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )，只存在 $n-k$ 個線性獨立的 basis function，因此必須於最外側的 $\xi_0$ 與 $\xi_n$ 的兩側再分別向外延伸 $k$ 個新節點，若 $k=3$ 則必須增加節點 $\xi_i$  ( $i = -3, -2, -1, n+1, n+2, n+3$ )，可再新建立 $2k$ 個線性獨立的 basis function，再配合原先閉區間 $[A, B]$ 中的 $n-k$ 個線性獨立的 basis function，共可組成 $n+k$ 個 $k$ 次線性獨立的 basis function。

Spline 模型運用於殖利率曲線的配適上，基本假設折現函數為下列形式：

$$D(t) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$$

其中 $a_i$   $i=1 \sim n$ 為估計參數

$f_i(t)$ 為設定的特定函數，即為上述的基底函數 (basis function)

能夠使符合下式的 $a_i$   $i=1 \sim n$ ，即為最佳解

$$\text{Min} \left( \sum_{i=1}^n w_i \cdot (\hat{P}_i - P_i)^2 \right)$$

其中

$$w_i = \frac{1/D_j}{\sum_{j=1}^n 1/D_j} \quad D_j \text{ 為第 } j \text{ 期公債的存續期間 (MacCauley Duration)}$$

藉由最佳解可求得最適折現函數，透過折現函數代入下式，再行推算出零息利率。

$$R_t = D(t)^{-\frac{1}{t}} - 1 \quad R_t \text{ 為 } t \text{ 時的零息利率}$$

## Svensson 模型

1994 年 Svensson 針對 Nelson-Siegel 模型再增加一個駝峰或 U 字型，因此 Svensson 模型配適的殖利率曲線可以出現兩個彎曲點，在殖利率曲線的配置上更具有彈性，可展現出更豐富的殖利率曲線型態。

Svensson 模型將瞬間遠期利率延伸為下列式子：

$$f(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right) + \beta_2 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_1} \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)} \right) \right] + \beta_3 \cdot \left[ \frac{TTM}{\tau_2} \left( e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)} \right) \right]$$

瞬間遠期利率函數的估計參數  $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ 、 $\tau_1$  及  $\tau_2$ ，其意義分別如下：

$\beta_0$ ：必定為正數，此數值為  $f(TTM)$  遠端漸近值，亦即長期的瞬間遠期利率應收斂於  $\beta_0$

$\beta_1$ ：此參數為短期因子，此參數決定短期（或起始值）與遠期漸進值的差異，同時此參數決定短期值以多快的速度收斂至長期漸近值，若  $\beta_1$  為負數則  $f(TTM)$  曲線為正斜率，反之則為負斜率

$\tau_1$ ：此參數必定為正數，表示此曲線的第一個駝峰或 U 字型的位置，同時決定  $\beta_1$  的收斂速度，當  $\tau_1$  值較小時收斂速度較快，反之則收斂速度慢

$\beta_2$ ：此參數描述曲線第一個峰態的大小及方向，若此參數為正數則曲線呈現駝峰狀（hump），若為負數則曲線呈現 U 字型（U-shaped）

$\tau_2$ ：此參數必定為正數，表示此曲線的第二個駝峰或 U 字型的位置

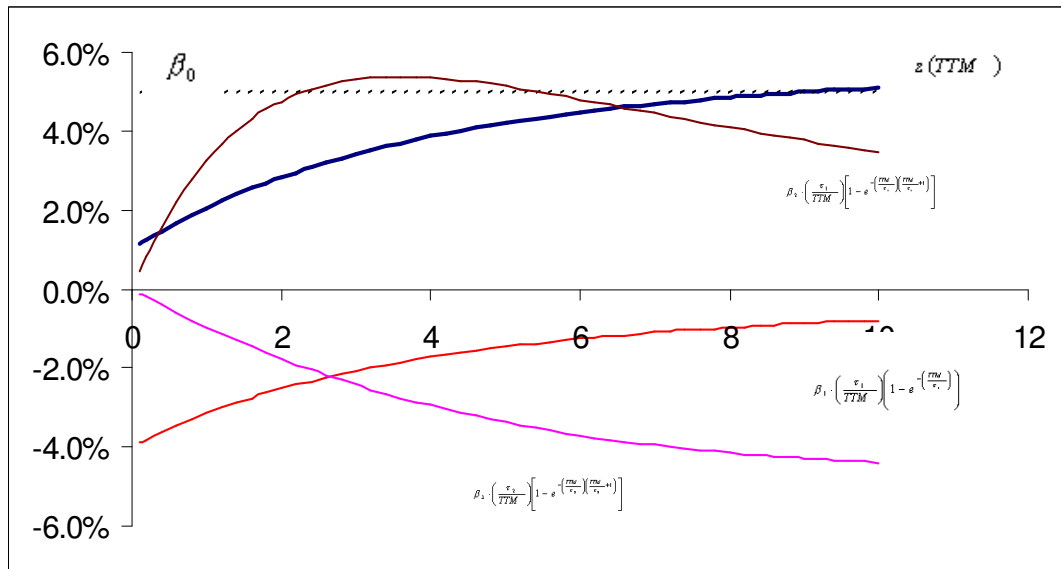
$\beta_3$ ：此參數描述曲線第二個峰態的大小及方向，若此參數為正數則曲線呈現駝峰狀（hump），若為負數則曲線呈現 U 字型

(U-shaped)

而將瞬間遠期利率  $f(TTM)$  轉換成為即期利率  $z(TTM)$ ，可表示如下式：

$$z(TTM) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left( \frac{\tau_1}{TTM} \right) \left( 1 - e^{-\left( \frac{TTM}{\tau_1} \right)} \right) + \beta_2 \cdot \left( \frac{\tau_1}{TTM} \right) \left[ 1 - e^{-\left( \frac{TTM}{\tau_1} \right)} \left( \frac{TTM}{\tau_1} + 1 \right) \right] + \beta_3 \cdot \left( \frac{\tau_2}{TTM} \right) \left[ 1 - e^{-\left( \frac{TTM}{\tau_2} \right)} \left( \frac{TTM}{\tau_2} + 1 \right) \right]$$

其零息殖利率曲線組成如下：



$\beta_0$	5.0%
$\beta_1$	-4.0%
$\beta_2$	18.0%
$\beta_3$	-15.0%
$\tau_1$	2.000
$\tau_2$	7.000

事實上 Svensson 模型的瞬間遠期利率  $f(TTM)$  的最後一項，乃是為了增強配適效果而加入，其並未有經濟上特殊的意義，故 Svensson 模型其實不能夠算是 Nelson-Siegel 模型的延伸，但由於 Svensson 模型在殖利率曲線的型態表現上更加豐富，因此能夠得到較 Nelson-Siegel 模型更佳的配適效果。